ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ (ΚΕΦΑΛΑΙΟ $5^{\underline{o}}$)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τχ $(E, \mathcal{T})$ θα καλείται:

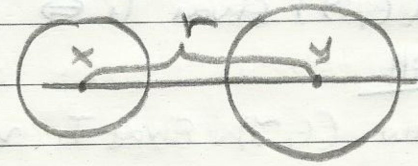
T_0-χώρος $\iff \Big[(\forall x, y \in E)\ x \neq y \Rightarrow \Big\{$ υπάρχει σύνολο ανοιχτό, που περιέχει ένα από τα x, y και όχι το άλλο $\Big]$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τ.χ $(E, \mathcal{T})$ θα καλείται:

T_1-χώρος $\iff \big[(\forall x, y \in E)\ x \neq y \Rightarrow (\exists\, U, V \in \mathcal{T})\ x \in U \wedge y \notin U$ και $x \in V \wedge y \notin V \big]$

Κάθε T_1-χώρος είναι και T_0-χώρος.

Π.Χ 1



Έστω (E, ρ) μ.χ $x \neq y$

τότε $r = \rho(x, y) > 0$ και

τότε μπορούμε να φτιάξουμε τις σφαίρες

$B(x, \frac{r}{3})$ και $B(y, \frac{r}{3})$

ΠΧ 2

Έστω ο τετριμμένος τχ $(E, \{E, \emptyset\})$ προφανώς δεν είναι T_0-χώρος και άρα όχι T_0.

Π.Χ.3 (Χώρος Sierpinski)

$E = \{0, 1\}$ και $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{0\}\}$ και έτσι δεν είναι T_1 αλλά είναι T_0-χώρος

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(E, \mathcal{T})$ τχ με $\operatorname{Card} E \geq 2$, τότε $(E, \mathcal{T})$ είναι $T_1 \iff$ Τα μονοσύνολα του $(E, \mathcal{T})$ είναι κλειστά

ΛΥΣΗ

$(\Rightarrow)$: Έστω ο χώρος είναι T_1 και έστω τυχόν $p \in E$

Θδο $\{p\}^c \in \mathcal{T}$. Έστω $x \in \{p^c\}$ δηλ. $x \neq p \xRightarrow{T_1}$

$\Rightarrow (\exists G \in \mathcal{T})\ x \in G$ και $p \notin G \Rightarrow (\exists G \in \mathcal{T}): x \in G$ και $G \subseteq \{p\}^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (\{p\}^c)^{\circ}$. Άρα, $\{p\}^c \in \mathcal{T} \Rightarrow \{p\}$ κλειστό

($\Leftarrow$): Έστω τα μονοσύνολα του E είναι κλειστά και ακόμη $x \neq y$ ($x, y \in E$). Τότε ($x \notin \{x\}^c$, $y \in \{x\}^c$) και ($y \notin \{y\}^c$, $x \in \{y\}^c$) προφανές. Όμως, $\{x\}^c$, $\{y\}^c$ είναι ανοιχτά εξ υποθέσεως

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ο τ.χ $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1 αν.ν τα πεπερασμένα υποσύνολα του E είναι κλειστά

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εάν $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1 και πεπερασμένος τότε η μόνη τοπολογία που δέχεται είναι η διακριτή

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(E, \mathcal{T})$ τχ με $\text{card}\, E \geq 2$
Τότε $(E, \mathcal{T})$ είναι $T_1 \Leftrightarrow \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}^*$: συμπεπερασμένη τοπολογία)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$): Έστω $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1 και $A \subseteq E$
Υποθέσουμε ότι $A \in \mathcal{T}^* \Longrightarrow A^c$ πεπερασμένο $\xRightarrow{\text{Πόρισμα}} A^c$ $\mathcal{T}$-κλειστό $\Rightarrow$
$\Rightarrow A \in \mathcal{T}$. Άρα, $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$

($\Leftarrow$): Έστω $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$. Θδο E είναι T_1-χώρος
Έστω $p \in E$ τότε $\{p\}^c \in \mathcal{T}^* \xrightarrow{\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}} \{p\}^c \in \mathcal{T} \Rightarrow \{p\}$ $\mathcal{T}$-κλειστό
$\Rightarrow E$ είναι T_1

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(E, \mathcal{T})$ τχ
Τότε $(E, \mathcal{T})$ είναι $T_1 \Leftrightarrow \forall A \subseteq E$ $\overbrace{\text{ισχύει } A = \bigcap \{V \in \mathcal{T} : A \subseteq V\}}^{(*)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

($\Rightarrow$): Έστω $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1. Θέτουμε συλλογή $\mathcal{A} = \{V \in \mathcal{T} : A \subseteq V\}$
$V \in \mathcal{A} \Rightarrow A \subseteq V \Rightarrow A \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Θδο $\bigcap \{V \in \mathcal{T} : A \subseteq V\} \subseteq A \Leftrightarrow [x \notin A \Rightarrow$
$\Rightarrow x \notin \bigcap \{V \in \mathcal{T} : A \subseteq V\}]$
Έστω $x \notin A$ και θεωρώ το $\{x\}^c \in \mathcal{T}$ (επειδή $\{x\}^c \in \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ αφού E είναι T_1) Ισχύει ακόμη: $A \cap \{x\} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \{x\}^c \in \mathcal{T}$
$\Rightarrow \{x\}^c = V$ και $x \notin A \subseteq V \Rightarrow x \notin V$ άρα θα:
$\exists V \in \mathcal{A} : x \notin V \Rightarrow x \notin \bigcap \mathcal{A}$

($\Leftarrow$): Εστω ισχύει η (*)

$x \notin \{y\} \overset{(*)}{=} \cap\{V \in \mathcal{J} : \{y\} \subseteq V\} \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{J}) : \{y\} \subseteq V$ με $x \notin V$

Δηλαδή $(\exists V \in \mathcal{J})$ $y \in V$ και $x \notin V$ ⊕

Απο την άλλη

$y \notin \{x\} \overset{(*)}{=} \cap\{U \in \mathcal{J} : \{x\} \subseteq U\} \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{J}) : \{x\} \subseteq U$ με $y \notin U$

Δηλαδή $(\exists U \in \mathcal{J})$: $x \in U$ και $y \notin U$ ⊕

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενας τ.χ $(E, \mathcal{J})$ καλείται

T_2-χώρος $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}(\forall x, y \text{ εν } E)\ x \neq y \text{ ισχύει} : (\exists G, H \in \mathcal{J}) \text{ με } x \in G \\ y \in H \text{ και } G \cap H = \emptyset\end{array}\right.$

$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Αντιπαράδειγμα:

Εστω $(E, \mathcal{J})$ συμπεπερασμένος, E απέραντο

Τότε είδαμε ότι $(E, \mathcal{J})$ είναι T_1

Θα εξετάσουμε εαν είναι T_2

Εστω A, B ανοιχτά δηλ. $A \in \mathcal{J}$ & $B \in \mathcal{J}$. Τότε $A \cap B \neq \emptyset$

Εαν $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B^c$ πεπερ. $\Rightarrow A$ πεπερ. $\}$ $A \cup A^c$ πεπερ. $\Rightarrow$

Αλλά $A \in \mathcal{J} \Rightarrow A^c$ πεπερ. $\quad \Rightarrow E$ πεπερ. άτοπο

Αρα, $(E, \mathcal{J})$ όχι T_2-χώρος.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

$(E, \mathcal{J})$ είναι T_2 $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{καθε δίκτυ στο } E \text{ συγκλίνει σε ένα} \\ \text{το πολύ στοιχείο του } E\end{array}\right.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$): Εστω $(E, \mathcal{J})$ είναι T_2 και έστω $(x_a)_{a \in A}$ εν E

με $x_a \to x$, $y_a \to y$, $x \neq y$ (και καταλήγουμε σε άτοπο)

Εφόσον $x \neq y$ και $E - T_2$ τότε $(\exists G \in \mathcal{J}) : x \in G$, $y \in H$ και $G \cap H = \emptyset$

$x_a \to x \xRightarrow{x \in G \in \mathcal{J}} (\exists a_1 \in A)(\forall a \in A)\ a \geq a_1 \Rightarrow x_a \in G$ (*)

$x_a \to y \xRightarrow{y \in G \in \mathcal{J}} (\exists a_2 \in A)(\forall a \in A)\ a \geq a_2 \Rightarrow x_a \in G$ (**)

$a_1 \in A$ και $a_2 \in A \xRightarrow{A \text{ κατευθ}} (\exists \gamma \in A)\ \gamma \geq a_1 \wedge \gamma \geq a_2 \Longrightarrow x_\gamma \in G \wedge x_\gamma \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow x_\gamma \in G \cap H$ άτοπο

($\Leftarrow$): Έστω ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα και έστω E όχι T_1. Τότε $(\exists x, y \in E)\ x \neq y : (\forall G, H \in \mathcal{T})$ ισχύει $G \cap H \neq \emptyset$.
Φτιάχνω ένα σύνολο
$\Lambda = \{(U,V) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V\}$
$(G,H) \geq (U,V) \Leftrightarrow G \subseteq U$ και $H \subseteq V$
$(\Lambda, \leq)$ κατευθυνόμενο
$\forall (U,V) \in \Lambda$ ισχύει $U \cap V \neq \emptyset$
Έστω $x_{(U,V)} \in U \cap V$ έτσι γεννάται ένα δίκτυο εν E
$(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \Lambda}$.
Έστω $W \in \mathcal{T}$ με $x \in W$ τότε $(W, E) \in \Lambda$
Έστω $(U,V) \in \Lambda : (U,V) \geq (W,E)$
Τότε θα έχαμε ότι $U \subseteq W$ και $V \subseteq E$
Άρα, $x_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq W$
Συνεπώς, $x_{(U,V)} \to x$. όμοια και για $x_{(U,V)} \to y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Σε έναν τχ. $(E, \mathcal{T})$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
i) $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2
ii) $(\forall x, y \in E)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{N}_x) : y \notin \overline{U}$
iii) $\cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\} = \{x\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
i)$\Rightarrow$ii): Έστω $(E, \mathcal{T})$ είναι T_2 και $x, y \in E$, $x \neq y$
Τότε κατά τα γνωστά $(\exists G, H \in \mathcal{T})$: $x \in G$, $y \in H$ ισχύει $G \cap H = \emptyset$
$G \cap H = \emptyset \Rightarrow G \subseteq H^c \Rightarrow \overline{G} \subseteq \overline{H^c} \xRightarrow{H \in \mathcal{T}} H^c \not\ni y$
$x \in G \in \mathcal{N}_x$ και $y \notin \overline{G}$

ii)$\Rightarrow$iii) Έστω $x \in E$ και $y \neq x$ και $y \in E \xRightarrow{(ii)}$
$(\exists U_y(x) \in \mathcal{N}_x) : y \notin \overline{U_y(x)}$. Άρα, $\{x\} \subseteq \cap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\} \subseteq$
$\subseteq \{\overline{U_y(x)} : y \in E, y \neq x\}$
Από την άλλη μεριά
$y \notin \{x\}$ δηλαδή $y \neq x$ Άρα, από (ii) $(\exists U_y(x) \in \mathcal{N}_x) : y \notin \overline{U_y(x)}$
Άρα, $y \notin \cap\{\overline{U_y(x)} : y \in E, y \neq x\}$. Άρα, $\cap\{\overline{U_y(x)}\ y \in E, y \neq x\} \subseteq \{x\}$

iii) $\Rightarrow$ i) : Ας είναι x, y εν E με $x \neq y$

τότε $y \notin \{x\} \overset{iii}{=} \cap \{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\} \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{N}_x)\ y \notin \overline{U}$:

ώστε $y \in (\overline{U})^c = H$.

Έστω $G = U^\circ$

$G \cap H = (\overline{U})^c \cap U^\circ \subseteq (\overline{U})^c \cap \overline{U} = \phi$

$U \in \mathcal{N}_x$: $x \in A \subseteq U \Rightarrow x \in A^\circ \subseteq U^\circ \Rightarrow U^\circ \in \mathcal{N}_x$

Άρα, είναι T_2